

**Обратите внимание:** в этом вопроснике есть специальные инструкции.  
Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

**שימו לב:** בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.  
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

## Математика

### 5 единиц обучения – второй вопросник

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד – שאלון שני

#### Указания

- Продолжительность экзамена: 3 часа.
- Строение вопросника и ключ к оценке:  
В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.  
Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа  
Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции  
Вы должны ответить на три вопроса по своему выбору –  $3 \times 33 \frac{1}{3} = 100$  баллов.
- Разрешенный вспомогательный материал:
  - Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
  - Листы с формулами (прилагаются).
  - Двуязычный словарь.

#### הוראות

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- מבנה השאלון ומפתח ההערכה:  
בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.  
פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים  
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות  
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם –  $33 \frac{1}{3} \times 100 = 100$  נקודות.
- חומר עזר מותר בשימוש:
  - מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
  - דפי נוסחאות (מצורפים).
  - מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

#### הוראות מיוחדות:

- Особые указания:
  - Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
  - Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка будет снижена или экзамен будет аннулирован.

- אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.
- יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

### Вопросы

Ответьте на три из вопросов 1–5 (за каждый вопрос –  $33\frac{1}{3}$  балла).

**Обратите внимание:** если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

### Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ) координаты вершины  $A$   $(a, 0)$ ,  $a$  – параметр, отличный от нуля.

Координата  $x$  вершины  $B$  равна  $-a$ . Сторона  $BC$  параллельна оси  $x$ .

Точка  $M$  – середина стороны  $BC$ .

( $\aleph$ ) Выразите при помощи  $a$  уравнение геометрического места, на котором располагаются все точки  $M$ .

( $\beth$ ) Начертите кривую, которую описывает уравнение, найденное вами в пункте ( $\aleph$ ).

Начертите обе возможные кривые в одной и той же системе координат.

Через одну из точек  $M$ , находящуюся в первом квадранте, провели прямую  $\ell$ , касательную к геометрическому месту, найденному вами в пункте ( $\aleph$ ).

( $\aleph$ ) Докажите, что прямая  $\ell$  параллельна прямой  $AC$ .

Также дано, что  $AM = 10$  (точка  $M$  находится в первом квадранте), а вершина  $B$  находится на прямой  $x = -2$ .

( $\beth$ ) Найдите координаты вершин  $B$  и  $C$ .

Через вершину  $A$  провели окружность, касающуюся прямых  $\ell$  и  $AC$ .

( $\beth$ ) Найдите координаты центра данной окружности.

2. Дана прямая  $\ell$  и плоскость  $\pi$ .

Параметрическое уравнение прямой  $\ell$  :  $\underline{x} = (-1, 5, -11) + t \cdot (m-1, 5-m, -2)$ .

Уравнение плоскости  $\pi$  :  $3x + my + (m+6)z + 4 = 0$ .

$m$  – параметр.

( $\times$ ) Покажите, что для любого значения  $m$  прямая  $\ell$  не параллельна плоскости  $\pi$ .

Дано, что прямая  $\ell$  перпендикулярна плоскости  $\pi$  и пересекает ее в точке  $A$ .

( $\square$ ) Найдите значение параметра  $m$ .

( $\blacktriangleright$ ) Найдите координаты точки  $A$ .

( $\blacktriangledown$ ) Ниже приведено утверждение:

Существует только одна плоскость, которая содержит прямую  $\ell$  и проходит через точку  $(5, -5, -9)$ .

Определите, верно ли это утверждение. Обоснуйте свой ответ.

3.  $z = x + yi$  – комплексное число ( $x$  и  $y$  – действительные числа).

( $\times$ ) Покажите, что геометрическое место всех точек  $(x, y)$  на гауссовой плоскости,

для которых  $|6 - \bar{z} - 8i|^2 - |10i| = |9 + 12i|$ , – это окружность.

Точка  $M$  – центр окружности, описанной в пункте ( $\times$ ).

Комплексные числа  $z_A$  и  $z_M$  представлены точками  $A$  и  $M$ , соответственно.

Дано: у чисел  $z_A$  и  $z_M$  один и тот же аргумент (угол),

$$2|z_A| = |z_M|.$$

( $\square$ ) Найдите координаты точки  $A$ .

Дана геометрическая прогрессия:  $z_1, z_2, z_3, \dots$ .

Первый член этой прогрессии представлен точкой  $A$ , а пятый член этой прогрессии представлен точкой  $M$ .

( $\blacktriangleright$ ) Найдите знаменатель этой прогрессии (все возможные значения).

( $\blacktriangledown$ ) Вычислите сумму:  $z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 + \dots + z_{10} \cdot \bar{z}_{10}$ .

## Раздел второй – рост и затухание, функции степени, показательные и логарифмические функции

4. Даны функции  $f(x) = \frac{a - x^2}{e^x}$ ,  $g(x) = \frac{(x + 1)^2}{e^x}$ , определенные для любого  $x$ .  
 $a$  – параметр.

(а) Найдите значение  $a$ , при котором  $f(x) = g'(x)$  для любого значения  $x$ .

Подставьте найденное вами значение  $a$  и ответьте на вопросы пунктов (б)–(г).

(б) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $f(x)$  с осями координат.

(2) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $g(x)$  с осями координат.

(3) Найдите координаты точек экстремума каждой из функций  $f(x)$  и  $g(x)$  и определите их тип.

(в) Начертите схематические графики функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в одной системе координат.

(г) Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции  $f(x)$  и осью  $x$ .

(д) Вычислите значение выражения  $\int_1^2 \left( \frac{e^{2x}}{(x+1)^4} \right) \cdot \left( \frac{x^2-1}{e^x} \right) dx$ .

5. На чертеже справа изображен график функции  $f(x) = \ln(x)$ , определенной в области  $x > 0$ , и изображены прямые  $y = x$  и  $y = -x$ .

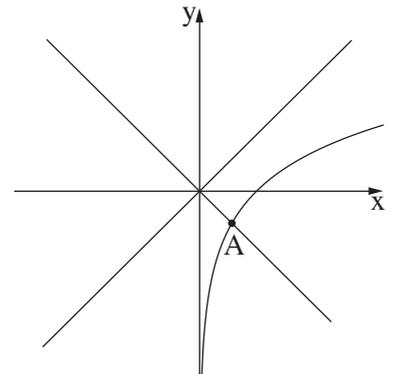
Точка  $A$  – точка пересечения графика функции  $f(x)$  с одной из данных прямых.

Обозначим через  $a$  координату  $x$  точки  $A$ .

Воспользуйтесь графиком и ответьте на вопросы пунктов (א)–(ה).

При необходимости выразите свои ответы при помощи  $a$ .

Дана функция:  $g(x) = \frac{\ln(x) - x}{\ln(x) + x}$ .



- (א) (1) Найдите область определения функции  $g(x)$ .
- (2) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $g(x)$  с осью  $x$  (если таковые существуют).
- (3) Найдите уравнение асимптоты функции  $g(x)$ , параллельной оси  $x$ .
- (ב) Объясните, почему выполняется  $0 < a < 1$ .
- (ג) (1) Найдите координаты точки экстремума функции  $g(x)$  и определите ее тип.
- (2) Найдите области возрастания и убывания функции  $g(x)$ .
- (ד) Начертите схематический график функции  $g(x)$ .
- (ה) Начертите схематический график функции  $h(x) = e^{g(x)}$ .

### Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.  
Копировать или публиковать можно только  
с разрешения Министерства просвещения.

### בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.  
אין להעתיק או לפרסם  
אלא ברשות משרד החינוך.