

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции.
Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика

5 единиц обучения – второй вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

Указания

- а. Продолжительность экзамена: 3 часа.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.
Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа
Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции
Вы должны ответить на три вопроса по своему выбору – $3 \times 33 \frac{1}{3} = 100$ баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

- Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
- Листы с формулами (прилагаются).
- Двуязычный словарь.

г. Особые указания:

- Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
- Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם – $33 \frac{1}{3} \times 100 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

Вопросы

Ответьте на три из вопросов 1–5 (за каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Дана окружность I, уравнение которой $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$, а центр в точке K.
Дана окружность II, уравнение которой $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 1$, а центр в точке L.
Точка A лежит на окружности I, а точка B лежит на окружности II.
Проводят касательную к окружности I в точке A и касательную к окружности II в точке B.
Две эти касательные пересекаются в точке M.
- (**к**) Покажите, что геометрическое место всех точек M, для которых выполняется $MA = MB$, является прямой, и найдите ее уравнение.
- (**д**) (1) Покажите, что прямая, уравнение которой вы нашли в пункте (**к**), и прямая KL перпендикулярны друг другу.
(2) Существует ли точка M, для которой выполняется $ML = MK$? Обоснуйте свой ответ.
- Дано, что для одной из точек M, расположенной над прямой KL, площадь треугольника KLM равна 9.
- (**л**) Найдите координаты точки M.
- Точка M, которую вы нашли в пункте (**л**), лежит на параболе $y^2 = 2px$, p – параметр.
- (**т**) Найдите уравнение касательной к этой параболе в точке M.

2. Даны две прямые l_1 и l_2 . Ниже приведены параметрические уравнения этих прямых.

$$l_1: \underline{x} = t(-1, 3, 0)$$

$$l_2: \underline{x} = (1, -3, 0) + m(0, k, 1)$$

k – параметр.

Точка A – точка пересечения прямых l_1 и l_2 .

(а) Найдите координаты точки A .

Обозначим через α угол между прямыми l_1 и l_2 .

(б) Найдите значение k , для которого выполняется $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

Подставьте $k = 2$ и ответьте на вопросы пунктов (а)–(г).

Плоскость π содержит прямые l_1 и l_2 .

(а) Найдите уравнение плоскости π .

Точка B лежит на прямой l_2 , а точка O – начало координат.

Треугольник AOB – равнобедренный, $AO = AB$.

(б) Объясните, почему треугольник AOB лежит в плоскости π .

Из точки A проводят перпендикуляр к плоскости π и обозначают на нем точку S .

Дано: объем пирамиды $SAOB$ равен $\frac{14\sqrt{2}}{3}$.

(г) Найдите координаты точки S (два возможных ответа).

3. В ромбе $ABCD$ вершина A лежит в первом квадранте, а вершина B лежит во втором квадранте в гауссовой плоскости.

Диагонали этого ромба пересекаются в точке начала координат.

Комплексное число z соответствует вершине A .

Дано: $BD = 2AC$.

(а) Выразите при помощи z числа, которые соответствуют вершинам B , C и D .

Обозначим: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

(б) Ответьте на вопросы подпунктов (1) и (2). При необходимости выразите ответы при помощи r и θ .

(1) Определите в полярной системе координат [רדיוס קנה] четыре числа, обратные $(\frac{1}{z}, \dots)$ числам, которые соответствуют вершинам данного ромба.

(2) Четыре числа, которые вы нашли в подпункте (б)-(1), соответствуют вершинам четырехугольника.

Найдите площадь четырехугольника, образованного этими вершинами.

(а) Дано уравнение: $w^{11} = \bar{w}$, w – комплексное число, не равное 0 .

Найдите сумму 12 решений этого уравнения.

Решения уравнения в пункте (а) соответствуют вершинам многоугольника, площадь которого равна площади четырехугольника, которую вы нашли в подпункте (б)-(2).

05 (б) Найдите значение r .

Раздел второй – рост и затухание, функции степени, показательные и логарифмические функции

4. Дана функция $f(x) = \frac{e^x - b}{(e^x - 4)^2}$, b – положительный параметр, $b \neq 4$.

(а) Ответьте на вопросы подпунктов (1)–(3). При необходимости выразите свои ответы при помощи b .

(1) Найдите область определения функции $f(x)$.

(2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.

(3) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.

Дано, что у функции $f(x)$ есть точка экстремума в точке, у которой $x = \ln(12)$.

(а) Найдите значение b и тип точки экстремума.

Подставьте в функцию $f(x)$ найденное вами значение b и ответьте на вопросы пунктов (а)–(г).

Дана функция: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(а) (1) Найдите область определения функции $g(x)$.

(2) Найдите уравнения асимптот функции $g(x)$, перпендикулярных осям координат.

(г) Начертите схематические графики функций $f(x)$ и $g(x)$ в одной системе координат.

(д) Какова координата y точек пересечения графика функции $f(x)$ с графиком функции $g(x)$?

Обоснуйте свой ответ.

(и) Определите, значение $\int_{-2}^{-1} (f(x) - g(x)) dx$ меньше или больше чем $1\frac{1}{2}$. Обоснуйте свой ответ.

5. Дана функция $f(x) = x((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 2)$, область определения которой $x > 0$.

(а) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$ (если таковые существуют).

(б) Найдите координаты точки перегиба функции $f(x)$.

(в) Найдите области положительных и отрицательных значений функции $f(x)$ (если таковые существуют).

(г) (1) Начертите схематический график функции $f(x)$.

(2) Начертите схематический график производной $f'(x)$.

Даны функции $g(x) = (\ln(x))^2 - 4$, $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, область определения которых $x > 0$.

(д) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$ и осью x .

Через точки пересечения графика функции $g(x)$ с осью x провели перпендикуляры к оси x .

(и) Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $g(x)$, графиком функции $h(x)$ и этими перпендикулярами.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.