

Обратите внимание: в этом вопроснике есть специальные инструкции. Отвечайте на вопросы, следуя этим инструкциям.

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות. יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

Указания

- а. Продолжительность экзамена: 4 часа 15 минут
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
 В этом вопроснике три раздела, в которых есть восемь вопросов. Раздел первый – алгебра и теория вероятности. Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости. Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций. Вы должны ответить на четыре вопроса, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела – $4 \times 25 = 100$ баллов.
- в. Разрешенный вспомогательный материал:
1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
 2. Листы с формулами (прилагаются).
 3. Двухязычный словарь.
- г. Особые указания:
1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
 2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

הוראות

- א. משך הבחינה: ארבע שעות ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
 בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות. פרק ראשון – אלגברה והסתברות. פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור. פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות. יש לענות על ארבע שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $25 \times 4 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 2. דפי נוסחאות (מצורפים).
 3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. תתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

Вопросы

Ответьте на четыре из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – 25 баллов).

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на четыре вопроса, будут проверены только первые четыре ответа в вашей тетради.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

1. В 8:00 Алон вышел из города 'א в город 'ב. Алон шел с постоянной скоростью в течение получаса, а затем остановился на 10 минут, чтобы отдохнуть. После отдыха Алон начал бежать в направлении города 'ב со скоростью, которая была в 2 раза больше скорости, с которой он шел. Алон пробежал в течение получаса $\frac{1}{6}$ расстояния между двумя городами, а затем снова остановился для отдыха на 10 минут. После второй остановки Алон продолжал бежать с той же скоростью, пока не оказался в городе 'ב. Дани выехал на велосипеде из города 'ב в город 'א. Он ехал с постоянной скоростью. Через 1 час 50 минут он оказался в точке, в которой Алон отдыхал в первый раз.
- (א) Найдите, во сколько раз скорость езды Дани больше скорости ходьбы Алона. Когда Дани оказался в точке, в которой Алон остановился на отдых в первый раз, он увеличил скорость своей езды до скорости, которая на 12.6 км/ч больше, чем его первоначальная скорость. Алон и Дани прибыли в пункты своего назначения точно в одно и то же время.
- (ב) Найдите скорость, с которой шел Алон, если дано, что Дани выехал из города 'ב в 9:40.
- (ג) Найдите интервал времени, в течение которого Дани должен был выехать из города 'ב, если он хотел проехать мимо Алона во время его второй остановки для отдыха.
2. В арифметической прогрессии А дано: $a_1 = -4 - 4k$, $a_3 = -16 + 2k$. k – параметр.
- (א) Найдите, при каких значениях k :
(1) прогрессия А возрастает, (2) прогрессия А убывает, (3) прогрессия А постоянна.
- Дано, что $a_{17} = -232$.
- (ב) Найдите значение k .
- Поставьте найденное вами значение k и ответьте на вопросы пунктов (ג)–(ד).
- Дана новая прогрессия, В, члены которой определены следующим образом: $b_n = a_n + 24n + 17$ для любого натурального n .
- (ג) Докажите, что прогрессия В является арифметической.
- (ד) Вычислите сумму $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{29}^2 - b_{30}^2$.

3. В одном городе было решено провести опрос, касающийся создания в нем нового парка. В опросе участвовали только молодые и пожилые жители. Каждый из жителей, участвовавших в опросе, написал, поддерживает он создание парка или возражает против него (воздержавшихся не было). Все пожилые люди, которые участвовали в опросе, поддержали создание парка. Случайным образом выбрали одного из жителей, которые участвовали в опросе. Обозначим через p вероятность того, что выбранный житель был молодым. Обозначим через k вероятность того, что выбранный житель поддержал создание парка.
- (к) Выразите при помощи p и k вероятность того, что выбранный житель был молодым человеком, который поддержал создание парка.

Половина молодых жителей, которые участвовали в опросе, поддержали создание парка. $\frac{3}{7}$ участников опроса, которые поддержали создание парка, были молодыми людьми.

- (а) Найдите p и k .

Йоси, корреспондент местной новостной программы, проинтервьюировал 6 случайно выбранных молодых жителей, принявших участие в опросе.

- (а) Какова вероятность того, что, по меньшей мере, один из них поддержал создание парка, и, по меньшей мере, один из них возражал против создания парка?

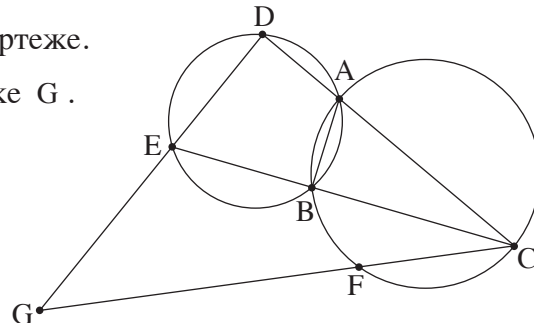
Затем Йоси проинтервьюировал одного за другим 5 случайно выбранных жителей, принявших участие в опросе.

- (т) Какова вероятность того, что в точности 3 из этих проинтервьюированных жителей были молодыми и что последний проинтервьюированный был молодым?

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Две окружности пересекаются в точках A и B . C – точка на правой окружности. Продолжения отрезков CA и CB пересекают левую окружность в точках D и E , соответственно.

Точка F расположена на дуге BC , как показано на чертеже. Продолжения отрезков CF и DE пересекаются в точке G .



- (а) Докажите: $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$.
- (б) Докажите: четырехугольник $GDAF$ может быть вписан в окружность.

Хорды AF и BC пересекаются в точке H .

Дано: $\sphericalangle GEC = \sphericalangle CHA$.

- (а) Докажите: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

Дано: CE перпендикулярен AB ,
 $DE = 18$, $CD = 36$.

- (б) Вычислите длины отрезков EG и CG .

5. Дана окружность, центр которой O , а радиус R .

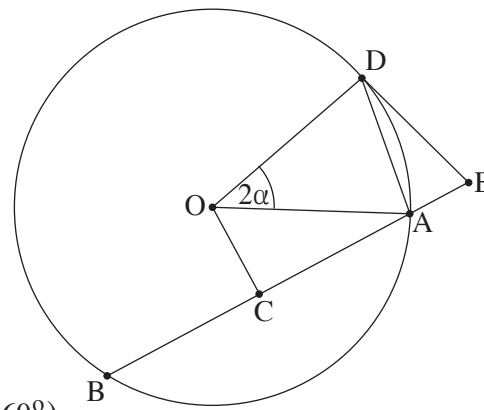
Из точки E , расположенной вне окружности, провели прямую, пересекающую данную окружность в точках A и B , как показано на чертеже.

Точка D – такая точка на большой дуге AB , что отрезок ED – касательная к этой окружности.

Точка C – это середина хорды AB .

Обозначим угол между радиусами OD и OA как 2α ($\alpha < 60^\circ$).

Дано: расстояние между точкой O и хордой AB равно $0.5R$.



- (а) Найдите углы четырехугольника $DOCE$. При необходимости выразите их при помощи α .
- (б) Выразите при помощи R и α длину отрезка DE .

Дано, что радиус окружности, описанной вокруг треугольника AOD равен $\frac{4}{7}R$.

- (а) Найдите α .
- (б) Найдите отношение между площадью окружности, описанной вокруг четырехугольника $DOCE$, и площадью данной окружности.

Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} - 2)^2}$.

- (⌘) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.
- (3) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.
- (4) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
- (⌚) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x} - 2}$, определенная в той же области, что и функция $f(x)$.

(⌘) Покажите, что для любого $x > 0$ в области определения этих функций выполняется $f(x) = g'(x)$.

(⌚) Ниже приведены утверждения I–II. Определите в отношении каждого из этих утверждений, верно ли оно. Обоснуйте свои ответы.

I. Существует касательная к графику функции $g(x)$, угловой коэффициент которой равен 2.

II. У функции $g(x)$ есть только одна точка перегиба.

(⌚) Вычислите значение выражения $\int_{0.25}^1 g(x) \cdot f(x) dx$.

7. Дана функция $f(x) = \frac{\sin(x) - a}{\sin(x) + a}$, a – положительный параметр.

Функция $f(x)$ определена для любого x , для которого $\sin(x) \neq -a$.

Дано, что во всех точках экстремума функции $f(x)$ ее график касается оси x .

(⌘) Найдите значение a .

Подставьте $a = 1$ и ответьте на вопросы пунктов (⌚)–(⌚) для области $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

- (⌚) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.
- (3) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
- (⌘) Начертите схематический график функции $f(x)$.
- (⌚) Сколько решений есть у уравнения $f(x) = -1$ в данной области? Обоснуйте свой ответ.

Известно, что функция $f(x)$ является вогнутой вниз во всех частях области своего определения.

(⌚) Определите, верно ли приведенное ниже утверждение. Обоснуйте свой ответ.

$$\int_0^{\pi} (f(x) + 1) dx > \frac{\pi}{2}$$

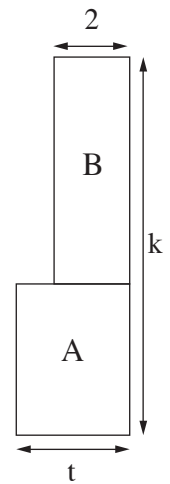
8. Даны два прямоугольных прилегающих друг другу сада, сад А и сад В .

Ширина сада А равна t метрам.

Ширина сада В равна 2 метрам, а его площадь равна $2t + 2$ м²,
как показано на чертеже справа.

Общая длина обоих садов равна k метрам. k – константа.

- (א) Выразите при помощи k и t площадь сада А .
- (ב) Выразите при помощи k значение t , при котором отношение площади сада В к площади сада А будет минимальным.
- (ג) Выразите при помощи k значение t , для которого отношение площади сада А к площади сада В будет максимальным. Обоснуйте свой ответ.



Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.