

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

Указания

а. Продолжительность экзамена: 3 часа 30 минут

б. Строение вопросника и ключ к оценке:

В этом вопроснике три раздела, в которых есть восемь вопросов.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

Раздел третий – дифференциальное и интегральное

исчисление полиномов, функций, содержащих корни,

рациональных функций и тригонометрических функций

Вы должны ответить на пять вопросов по выбору –

$5 \times 20 = 100$ баллов

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

2. Листы с формулами (прилагаются).

3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.

2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы.

Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора).

Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות

רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם –

$20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות

התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות

התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת

הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה;

יש לסמן את מספרה בלבד.

2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.

יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון,

גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת

מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל

חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או

לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Обратите внимание! Объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.

Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Ответьте на пять из вопросов 1–8 (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять ответов в вашей тетради.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

1. На берегу реки есть три станции: станция А, станция В и станция С, которая расположена между станцией А и станцией В.

Река течет в направлении от станции А к станции В с постоянной скоростью.

Две лодки, лодка I и лодка II, вышли в 8:00 из точки С в противоположных направлениях: лодка I плыла (против течения реки) к станции А, а лодка II плыла (по течению реки) к станции В.

Сразу после того, как каждая лодка достигла соответствующей станции, она развернулась и начала плыть в противоположном направлении.

Дано, что скорость каждой из лодок в неподвижной воде постоянная.

Скорость лодки I, когда она плыла по течению, была в 1.5 раза больше, чем ее скорость, когда она плыла против течения.

Скорость лодки II, когда она плыла по течению, была в 4 раза больше, чем скорость лодки I, когда она плыла против течения.

Обозначим как x скорость течения реки.

(*) Выразите при помощи x скорость лодки I в неподвижной воде и скорость лодки II в неподвижной воде.

Лодка I приплыла на станцию А через 3 часа с момента ее выхода в путь, после чего она немедленно развернулась и поплыла в сторону станции В.

Лодка II приплыла на станцию В через 7 часов с момента ее выхода в путь, после чего она немедленно развернулась и поплыла в сторону станции А.

(а) (1) В котором часу лодки встретились?

(2) Лодки встретились между станцией А и станцией С или между станцией В и станцией С? Обоснуйте свой ответ.

Лодки встретились на расстоянии 84 км от станции С.

(б) Какова скорость течения воды?

2. Дана бесконечная геометрическая прогрессия A , общий член которой a_n , а знаменатель которой q .

Строят новую последовательность B , общий член которой $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

(**к**) Докажите, что последовательность B также является геометрической прогрессией.

(**а**) Относительно каждого из высказываний (1) и (2) определите, верно оно или неверно, и обоснуйте свой ответ.

(1) Если прогрессия A не сходящаяся, то и прогрессия B обязательно также не сходящаяся.

(2) Если прогрессия A убывающая, она обязательно также сходящаяся.

Дано, что обе эти прогрессии сходящиеся и что соотношение между суммой всех членов прогрессии B и суммой всех членов прогрессии A равно $\frac{3}{5}$.

(**а**) Найдите q .

Дано: n – натуральное число, для которого выполняется $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{2059}{729}$.

(**т**) Найдите n .

3. В магазине фруктов находятся ящики, в которых лежат фрукты.

В ящике 'к' находится a фруктов: 3 яблока, а остальные – груши.

В ящике 'г' находится b фруктов: 5 яблок, а остальные – груши.

Случайным образом извлекают один фрукт из ящика 'к'. Если этим фруктом оказалось яблоко, его кладут в ящик 'г', а если им оказалась груша, то ее возвращают в ящик 'к'.

Затем случайным образом извлекают один фрукт из ящика 'г'.

(**к**) При помощи a и b выразите вероятность того, что было извлечено 2 яблока.

Дано: вероятность извлечения двух яблок указанным выше способом равна $\frac{9}{65}$;

вероятность извлечения одного яблока, а затем одной груши указанным выше способом равна $\frac{21}{130}$.

(**а**) Найдите a и b .

(**а**) Вычислите вероятность того, что из ящика 'г' будет извлечена груша, если известно, что из ящика 'к' было извлечено яблоко.

Все фрукты из двух данных ящиков переносят в другой ящик, который до этого был пустым, и случайным образом извлекают из него 6 раз фрукт, каждый раз возвращая его в ящик.

(**т**) Найдите вероятность того, что в точности 4 раза из шести было извлечено яблоко или что все 6 раз была извлечена груша.

(**т**) Известно, что в точности 4 раза из шести было извлечено яблоко. Найдите вероятность того, что яблоки были извлечены подряд, одно за другим.

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Две окружности пересекаются в точках A и B (смотрите чертеж).

Хорда AC в левой окружности пересекает правую окружность в точке D .

Хорда AE в правой окружности пересекает левую окружность в точке F .

Отрезок CE проходит через точку B .

(**⌘**) Докажите, что $\triangle ACE \sim \triangle BCD$.

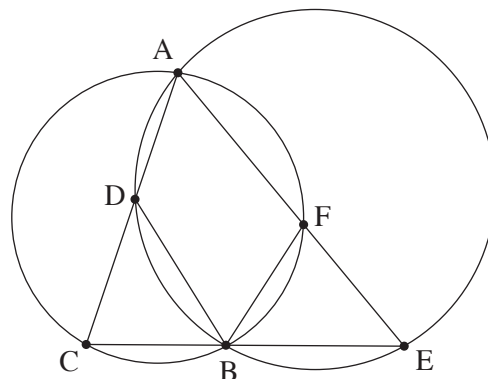
Дано: $DC = FE$.

(**⌘**) Докажите, что $\triangle BFE \cong \triangle BCD$.

(**⌘**) (1) Докажите, что $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.

(2) Докажите, что AB – биссектриса угла CAE .

(**⌘**) Докажите, что $\sphericalangle DEC = \sphericalangle FCE$.



5. Треугольник $B CD$ вписан в окружность, центр которой находится в точке O , а радиус которой R .

Точки O и E – такие точки на стороне BD , что выполняется $OE = ED$ (смотрите чертеж).

Обозначим: $CD = m$, $\sphericalangle CDB = \alpha$.

(**⌘**) Выразите $\cos \alpha$ при помощи m и R .

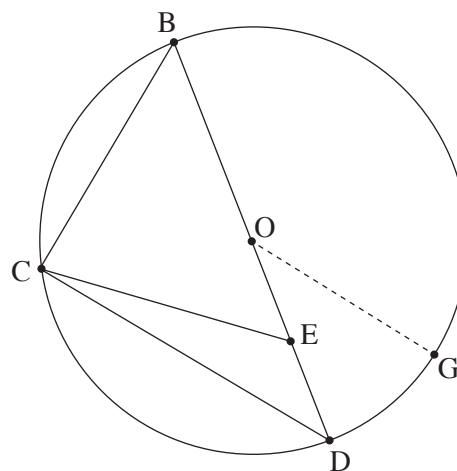
(**⌘**) Докажите, что $CE = \frac{1}{2}\sqrt{2m^2 + R^2}$.

Дано: $BC = EC$.

(**⌘**) Вычислите α .

Проводят радиус OG , параллельный стороне CD , как показано на чертеже.

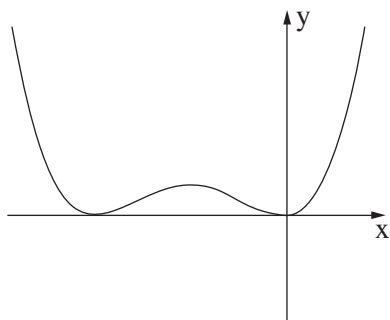
(**⌘**) Вычислите величину угла OEG .



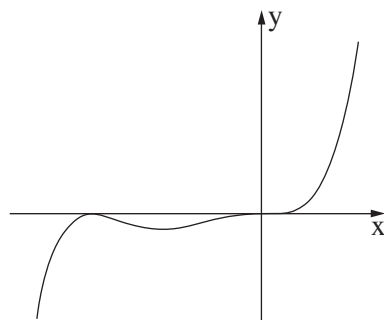
Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция $f(x) = x^n \cdot (x + 1)^2$, $n > 1$ – натуральное число. Функция $f(x)$ определена для любого x .
- (а) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.
 - (б) Найдите области положительных значений и области отрицательных значений функции $f(x)$ (если таковые существуют). Проведите различие между четным n и нечетным n .
 - (в) Найдите координаты x точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип. При необходимости выразите свой ответ при помощи n . Проведите различие между четным n и нечетным n .

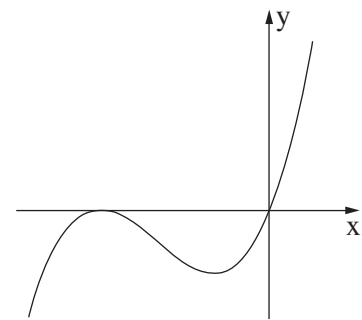
Ниже приведены три графика I–III. Один из этих графиков изображает функцию $f(x)$ для четного n , а один из них изображает функцию $f(x)$ для нечетного $n > 1$.



III



II



I

- (г) Определите, какой график изображает функцию $f(x)$ для четного n , а какой изображает функцию $f(x)$ для нечетного $n > 1$. Обоснуйте свои ответы.

Дана функция $g(x) = a \cdot f(x - 2)$, a – положительный параметр.

Обозначим как T площадь фигуры, заключенной между графиком функции $g(x)$ и осью x .

- (д) Выразите при помощи a и T площадь фигуры, заключенной между графиком функции $f(x)$ и осью x . Обоснуйте свой ответ.

7. Дана функция $f(x) = \frac{2 \sin(x)}{\cos^2(x) - 1}$ в области $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

- (а) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
- (2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных оси x .
- (3) Функция $f(x)$ четная, нечетная или не четная и не нечетная? Докажите свой ответ.
- (б) Ответьте на вопросы подпунктов (1)–(2) для области $0 \leq x \leq 2\pi$.
- (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат (если таковые существуют).
- (2) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
- (в) Начертите схематический график функции $f(x)$ (в области $-2\pi \leq x \leq 2\pi$).
- (г) Докажите, что у функции $f(x)$ нет точек перегиба.
- (д) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции производной $f'(x)$ и осью x в области $1.7 \leq x \leq 2$.

8. Ниже приведены три функции, у каждой из которых есть два значения x , для которых она не определена.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)}, \quad h(x) = \frac{x^3}{x(x + 2)}, \quad k(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)}$$

Известно, что у одной из этих трех функций есть только одна горизонтальная асимптота и только одна вертикальная асимптота.

(а) Определите, какая функция из трех данных функций отвечает всем этим характеристикам. Обоснуйте свой ответ.

Ответьте на вопросы пунктов (1)–(7) для функции, которую вы определили в пункте (а).

- (б) (1) Найдите уравнение горизонтальной асимптоты и уравнение вертикальной асимптоты этой функции.
- (2) Найдите координаты точек пересечения графика этой функции с осями координат.

Дано, что у этой функции нет точек экстремума.

(в) Начертите схематический график этой функции.

На графике этой функции обозначим точку A , для которой $x = t$, $-1 < t < 1$.

Из точки A проводят две прямые, одна из которых перпендикулярна оси x , а другая перпендикулярна вертикальной асимптоте функции, так что обе эти прямые, вертикальная асимптота и ось x образуют прямоугольник.

(г) Найдите значение t , для которого периметр полученного прямоугольника является минимальным. В своем ответе вы можете оставить знак корня.

Желаем успеха!

בהצלחה!