

Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

Указания

- а. Продолжительность экзамена: 3 часа 30 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
 В этом вопроснике три раздела, и в них восемь вопросов. Раздел первый – алгебра и теория вероятности
 Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости
 Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций
 Вы должны ответить на пять вопросов, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела – $5 \times 20 = 100$ баллов.
- в. Разрешенный вспомогательный материал:
 1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
 2. Листы с формулами (прилагаются).
 3. Двухязычный словарь.
- г. Особые указания:
 1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.
 2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, ясно и по порядку. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
 ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
 בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות. פרק ראשון – אלגברה והסתברות
 פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור
 פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
 יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $5 \times 20 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
 1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 2. דפי נוסחאות (מצורפים).
 3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
 1. אין להעתיק את השאלה;
 יש לסמן את מספרה בלבד.
 2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש.
 יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל פעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
 תתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Вопросы

Ответьте на пять из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

1. Два велосипедиста, велосипедист 'א и велосипедист 'ב, выехали из двух точек, А и В, соответственно, и поехали навстречу друг другу.

Расстояние между точками А и В равно $3d$ км (d – положительный параметр).

Велосипедист 'ב отправился в путь через 2.5 часа после того, как велосипедист 'א отправился в путь.

В 15:30 выяснилось, что каждый из велосипедистов проехал треть расстояния между точками А и В.

Скорость каждого из велосипедистов была постоянной.

На следующий день велосипедисты снова выехали из тех же точек, А и В, и поехали навстречу друг другу.

Каждый из велосипедистов ехал с той же скоростью, с которой он ехал в первый день.

На этот раз они выехали в одно и то же время и встретились через 9 часов.

(א) (1) В каком часу в первый день велосипедист 'א выехал из точки А ?

(2) Выразите через d скорость каждого из велосипедистов.

Время, которое потребовалось велосипедисту 'א, чтобы проехать один километр, на 1.25 минуты больше, чем время, которое потребовалось велосипедисту 'ב, чтобы проехать один километр.

(ב) Найдите расстояние между А и В.

2. Даны две бесконечные сходящиеся [תלכסלמ] геометрические прогрессии, A и B , все члены которых отличны от 0 .

Общим членом прогрессии A является a_n , а ее знаменателем является q_A .

Общим членом прогрессии B является b_n , а ее знаменателем является q_B .

Из двух геометрических прогрессий A и B строят новую бесконечную сходящуюся геометрическую прогрессию, члены которой:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

Все три прогрессии, прогрессия A , прогрессия B и новая прогрессия не постоянные.

(**א**) Выразите знаменатель новой прогрессии при помощи q_A и q_B .

Прогрессия A не убывающая и не возрастающая, а прогрессия B – возрастающая.

(**ב**) Относительно каждого из двух высказываний (1)–(2) определите, верно оно или неверно, и обоснуйте свой ответ.

(1) Знаменатель новой прогрессии является положительным.

(2) Все члены прогрессии B являются отрицательными.

Числа c_1 , c_2 и c_3 являются тремя первыми членами арифметической прогрессии.

Дано, что c_2 равен $-c_1$ и что также выполняется: $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{45}$.

(**א**) Найдите c_1 .

Дано, что знаменатель прогрессии A равен c_1

и также выполняется $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$

(**ב**) Найдите значение q_B .

3. В большом колледже предложили сократить обеденный перерыв, чтобы учебный день заканчивался раньше. Вследствие этого состоялся опрос, в котором участвовали все студенты 1 курса и все студенты 2 курса.

Согласно результатам опроса выяснилось, что 80% участников, которые поддержали предложение, были студентами 1 курса. Также выяснилось, что число студентов 1 курса, поддержавших предложение, равно числу студентов 2 курса, которые выступили против предложения. Среди участников опроса не было воздержавшихся.

Обозначим через p вероятность выбрать случайным образом из числа всех студентов, участвовавших в опросе, студента, который поддерживает предложение.

(**א**) Случайным образом выбрали одного студента из числа студентов 2 курса. Какова вероятность того, что он выступает против предложения?

Известно, что вероятность того, что студент, выбранный случайным образом из числа студентов 1 курса, поддерживает предложение, на $\frac{13}{35}$ больше вероятности того, что студент, выбранный случайным образом из числа студентов 2 курса, поддерживает предложение.

(**ב**) Вычислите значение p .

(**א**) Случайным образом выбрали одного из участников опроса. Вычислите вероятность того, что выполняется, по меньшей мере, одно из следующих условий:

I. Выбранный участник – студент 2 курса.

II. Выбранный участник поддерживает это предложение.

(**ב**) Случайным образом выбрали 5 из участников опроса.

Известно, что все пятеро выбранных участников являются студентами 2 курса. Какова

вероятность того, что, по меньшей мере, двое из них поддерживают предложение, а также, по меньшей мере, двое из них выступают против предложения?

/продолжение на странице 4/

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. Точки A, B и C расположены на окружности.

Точка E – середина дуги BC , как показано на чертеже справа.

Через точку E проводят касательную к данной окружности.

Эта касательная пересекает продолжение хорды AB в точке G .

Хорды AE и BC пересекаются в точке F .

(*) Докажите: $\triangle ACE \sim \triangle AEG$.

Дано: $AG = 6$, $AE = 3\sqrt{6}$.

(1) Вычислите длину хорды AC .

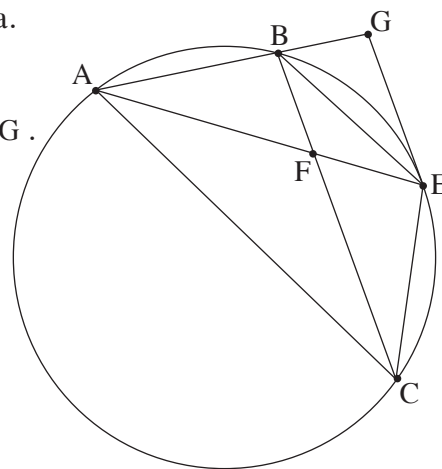
(2) Докажите: $BC \parallel GE$.

Дано: площадь треугольника ABF в 2 раза больше площади треугольника BFE .

(3) Вычислите длину хорды AB .

(4) Каково соотношение между площадью треугольника ABF и площадью треугольника AFC ?

Обоснуйте свой ответ.



5. Дельтоид $[ABCD]$ вписан в окружность с радиусом R .

Хорда AC – главная диагональ дельтоида.

Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC (смотрите чертеж).

Обозначим: $\sphericalangle CAB = \alpha$.

(*) (1) Найдите углы треугольника AOC

(при необходимости выразите при помощи α).

(2) Выразите длину отрезка AO при помощи α и R .

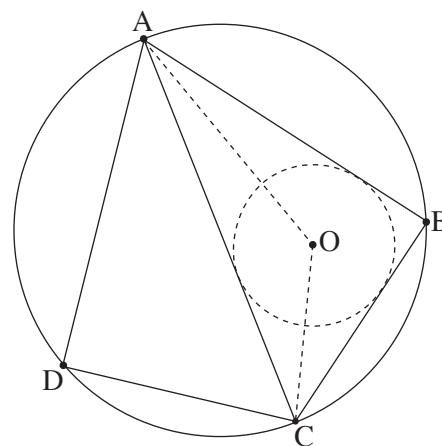
Дано, что длина отрезка AO равна $R\sqrt{2}$.

(1) Найдите величину угла α .

Дано, что площадь дельтоида равна $25\sqrt{3}$.

(2) Найдите R .

(3) Вычислите расстояние между центром окружности, описанной вокруг дельтоида, и центром окружности, вписанной в треугольник ABC .



Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция: $f(x) = \frac{2a - x^2}{x}$, определенная для $x \neq 0$. a – положительный параметр.

(к) При необходимости выразите свои ответы при помощи a .

(1) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат, если таковые существуют.

(2) Покажите, что функция $f(x)$ является нечетной функцией.

(3) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат (если таковые существуют).

(4) Найдите области возрастания и области убывания функции $f(x)$ (если таковые существуют).

(5) Найдите область вогнутости вверх (\cup) и область вогнутости вниз (\cap) функции $f(x)$.

(а) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Также дана функция $g(x) = |f(x)| - b$, b – положительный параметр.

Функция $g(x)$ определена в той же области, что и функция $f(x)$.

(б) Начертите схематический график функции $g(x)$.

Известно, что одной из точек экстремума функции $g(x)$ является $(2, -3)$.

(в) Найдите значения a и b .

Также дана функция $s(x) = \int_1^x g(t) dt$, определенная в области $1 < x$.

(г) Каков тип точки экстремума функции $s(x)$? Обоснуйте свой ответ.

7. Дана функция $f(x)$, определенная в области $x \leq a$, $x \neq 0$.

a – положительный параметр.

На чертеже справа изображен график функции производной $f'(x)$.

Функция производной $f'(x)$ определена в области $x \neq 0$, $x < a$.

У функции производной $f'(x)$ есть три асимптоты,

перпендикулярные осям координат,

уравнения которых $y = 0$, $x = a$, $x = 0$.

В области $x < 0$ функция производной $f'(x)$ возрастает.

Прямая $x = 0$ является асимптотой также и к графику функции $f(x)$.

$f(a) = 0$.

(**⌘**) (1) Найдите область возрастания и область убывания функции $f(x)$ (при необходимости выразите свой ответ при помощи a). Обоснуйте свой ответ.

(2) Сколько точек перегиба есть у функции $f(x)$? Обоснуйте свой ответ.

Дано, что прямая $y = 0$ является асимптотой к графику функции $f(x)$.

(**Ⓐ**) Начертите возможный схематический график функции $f(x)$ в соответствии с вашим ответом в подпункте (**⌘**)–(2).

Дано, что одно из приведенных ниже выражений I–IV соответствует функции $f(x)$.

$$\frac{\sqrt{x-a}}{x} \text{ .IV} \quad \frac{\sqrt{a-x}}{x} \text{ .III} \quad \frac{\sqrt{x-a}}{x^2} \text{ .II} \quad \frac{\sqrt{a-x}}{x^2} \text{ .I}$$

(**⌘**) Какое из выражений I–IV соответствует функции $f(x)$? Обоснуйте свой ответ.

Известно, что угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке, в которой $x = (-2)$, равен $\frac{7}{16}$.

(**Ⓣ**) Найдите значение a .

(**Ⓝ**) Подставьте $a = 2$ и вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции $(f(x))^2$, осью x и прямой $x = 1$.

8. Дан ромб ABCD. Точка E – середина стороны BC.

Обозначим: $\sphericalangle ECD = x$.

Дано: площадь треугольника ECD равна 18.

(**⌘**) Выразите при помощи x длину стороны ромба.

(**Ⓐ**) Вычислите минимальную длину отрезка DE.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.

