

תוכנית חדשה

Математика

5 единиц обучения – второй вопросник

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

Указания

- а. Продолжительность экзамена: 2 часа 15 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике два раздела, и в них пять вопросов.
Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа
Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции
Вы должны ответить на три вопроса по выбору, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ баллов.

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка будет снижена или экзамен будет аннулирован.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתובת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

הוראות

- א. משך הבחינה: שתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
2. יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

Вопросы

Обратите внимание! Объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.

Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Ответьте на три из вопросов 1–5, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

Обратите внимание: если вы ответите более чем на три вопроса, будут проверены только первые три из ответов в вашей тетради.

Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа

1. Дан эллипс, уравнение которого $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, b – положительный параметр.

Известно, что фокусы этого эллипса находятся на оси x .

Обозначим точки пересечения этого эллипса с осью y как D_1 и D_2 , левый фокус этого эллипса обозначим как F_1 , а его правый фокус – как F_2 .

Дано, что четырехугольник $F_1D_1F_2D_2$ – это квадрат.

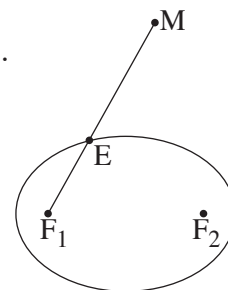
(**ж**) (1) Найдите значение b .

(2) Вычислите площадь четырехугольника $F_1D_1F_2D_2$.

Подставьте в уравнение этого эллипса $b^2 = 4.5$ и ответьте на вопросы (з)–(т).

Точка E – произвольная точка на этом эллипсе.

Прямой линией соединяют левый фокус F_1 с точкой E и продолжают эту прямую линию до точки M (смотрите чертеж), так что выполняется $EM = EF_2$.



(**з**) Докажите, что геометрическим местом всех точек M является окружность, и напишите ее уравнение.

Сдвигают окружность, которую вы нашли в пункте (з), вправо на $\frac{3}{\sqrt{2}}$ единицы, и получается другая окружность.

Умножают на $\frac{2}{3}$ координату y каждой из точек, расположенных на этой другой окружности, и получается новая кривая.

(**и**) Определите форму этой новой кривой и найдите ее уравнение.

Дан треугольник, две из вершин которого – точки пересечения этой новой кривой с осью x , и еще одна вершина также находится на этой новой кривой.

(**т**) Найдите наибольшую возможную площадь этого треугольника. Обоснуйте свой ответ.

2. Даны две плоскости, π_1 и π_2 :

$$\pi_1: (k+2)x + y + (k+1)z + 11 = 0$$

$$\pi_2: (k+1)x + y + z - 5 = 0$$

k – параметр.

(*) Объясните, почему эти плоскости обязательно пересекаются друг с другом.

Известно, что прямая ℓ_1 , по которой пересекаются эти две плоскости, параллельна прямой

$$\ell_2: \underline{x} = (1, 2, -1) + m(-1, k, k).$$

(*) (1) Найдите значение k .

(2) Найдите параметрическое уравнение прямой ℓ_1 .

(3) Найдите угол между плоскостями π_1 и π_2 .

Точка P находится на прямой ℓ_1 и на плоскости $[yz]$.

Точки A и B – точки пересечения оси y с плоскостями π_1 и π_2 , соответственно.

(*) (1) Найдите координаты точек P , A и B .

(2) Найдите площадь треугольника APB .

3. Дано уравнение I: $w^6 = -27$, w – комплексное число.

(*) Решите уравнение I.

Дано уравнение II: $\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 = -27$, z – комплексное число.

(*) (1) Воспользуйтесь решениями уравнения I и запишите в алгебраическом виде решения уравнения II.

(2) Объясните, почему точки на гауссовой плоскости, представляющие решения уравнения II, находятся на окружности, и найдите уравнение этой окружности.

(3) Докажите, что все решения уравнения II представлены вершинами правильного шестиугольника на гауссовой плоскости.

Дано: два мнимых решения и два действительных решения уравнения II представлены вершинами четырехугольника на гауссовой плоскости.

(*) (1) Каков тип полученного четырехугольника? Обоснуйте свой ответ.

(2) Найдите соотношение между площадью этого шестиугольника и площадью этого четырехугольника.

Раздел второй – рост и затухание, функции степени, показательные и логарифмические функции

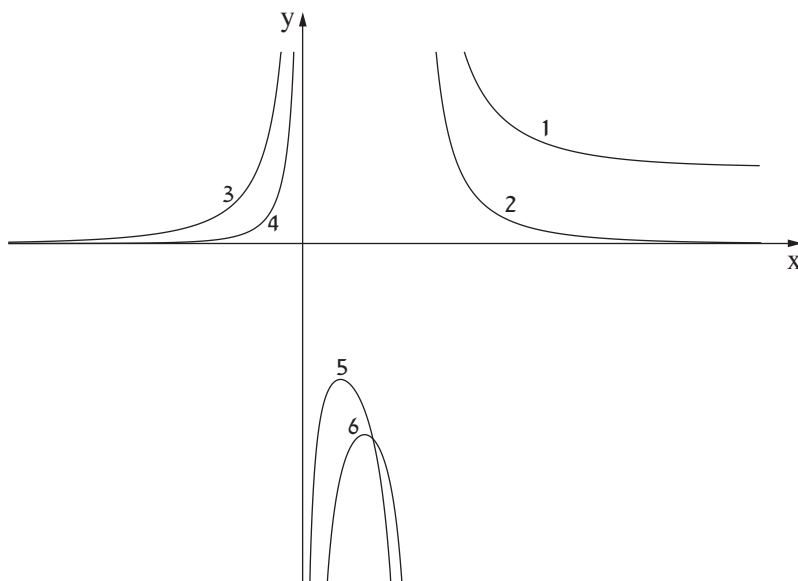
4. Дана функция $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 5e^x + 4}$.

- (а) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
 (2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат.
 (3) Найдите области возрастания и области убывания функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \frac{5e^x}{e^{2x} - 5e^x + 4}$, определенная в той же области, в которой определена функция $f(x)$.

- (б) Найдите координаты точки пересечения графика функции $f(x)$ с графиком функции $g(x)$.

Ниже приведен чертеж графиков обеих функций $f(x)$ и $g(x)$. Каждая из частей этих графиков обозначена на чертеже другой цифрой.



- (в) Запишите, какой функции принадлежит каждая из частей, обозначенных на чертеже. Обоснуйте свой ответ.
 (г) Ниже приведены два выражения, I–II. Определите относительно каждого из выражений, является оно отрицательным или положительным. Обоснуйте без вычислений.

$$\text{I. } \int_{-4}^{-1} (f(x) - g(x)) dx \qquad \text{II. } \int_{\ln \frac{8}{5}}^{\ln 2} (f(x) - g(x)) dx$$

- (д) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиками двух функций $f(x)$ и $g(x)$ и прямыми $x = \ln 9$ и $x = \ln 16$.

5. Дана функция $f(x) = 4x(\ln(x^2) - 1)$.

- (⌘) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
(2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осью x .
(3) Докажите, что функция $f(x)$ нечетная.
- (⌚) (1) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
(2) Есть ли у функции $f(x)$ точки перегиба? Обоснуйте свой ответ.
(3) Начерните схематический график функции $f(x)$.

Дана функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

- (⌚) (1) Найдите область определения функции $g(x)$.
(2) Найдите уравнения асимптот функции $g(x)$, перпендикулярных осям координат.
(3) Начерните схематический график функции $g(x)$.
(4) Во скольких точках графики $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются друг с другом? Обоснуйте свой ответ.
- (⌚) Напишите пример первообразной [קדומה] функции для $g(x)$.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.