

Государство Израиль  
Министерство просвещения  
Тип экзамена: на аттестат зрелости  
Время проведения экзамена: лето 2023 года  
Номер вопросника: 035571  
Приложение: листы с формулами  
для уровня в 5 единиц обучения  
Перевод на русский язык (5)

מדינת ישראל  
משרד החינוך  
סוג הבחינה: בגרות  
מועד הבחינה: קיץ תשפ"ג, 2023  
מספר השאלון: 035571  
נספח: דפי נוסחאות  
ל-5 יחידות לימוד  
תרגום לרוסית (5)

תוכנית חדשה

## Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

## מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

### Указания

- а. Продолжительность экзамена: 3 часа 30 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:  
В этом вопроснике три раздела, и в них восемь вопросов. Раздел первый – "короткие вопросы", последовательности и теория вероятности  
Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости  
Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций  
Вы должны ответить на пять вопросов по выбору –  $5 \times 20 = 100$  баллов.
- в. Разрешенный вспомогательный материал:
1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
  2. Листы с формулами (прилагаются).
  3. Двухязычный словарь.

### г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.
2. Начиная ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, ясно и по порядку. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

### הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:  
בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות. פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות  
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור  
פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות  
יש לענות על חמש שאלות לבחירתכם –  $5 \times 20 = 100$  נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
  2. דפי נוסחאות (מצורפים).
  3. מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

### ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיקו את השאלה; סמנו את מספרה בלבד.
2. התחילו כל שאלה בעמוד חדש. קשמו במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבירו את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.  
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טיוטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

בהצלחה!

### Вопросы

**Обратите внимание:** объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.

**Недостаточно подробное объяснение может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.**

Ответьте на пять из вопросов 1–8, по меньшей мере на один вопрос из каждого раздела (за каждый вопрос – 20 баллов).

**Обратите внимание:** если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять из ответов в вашей тетради.

### Раздел первый – "Короткие вопросы", последовательности и теория вероятности

1. Ответьте на три из четырех пунктов (κ)–(τ), приведенных ниже. Если вы ответите более чем на три пункта, будут проверены только первые три ответа в вашей тетради.

(κ) Даны две последовательности, определенные для любого натурального  $n$  :

$$a_n = 2n - 1, b_n = 2^n .$$

$$\text{Обозначим: } T_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n .$$

(1) Докажите, что

$$\text{если для любого натурального } k \text{ выполняется: } T_k = (2k - 3) \cdot 2^{k+1} ,$$

$$\text{то выполняется: } T_{k+1} = (2k - 1) \cdot 2^{k+2} .$$

Дано утверждение: для любого натурального  $n$  выполняется:  $T_n = (2n - 3) \cdot 2^{n+1}$  .

(2) Объясните, почему это утверждение неверно.

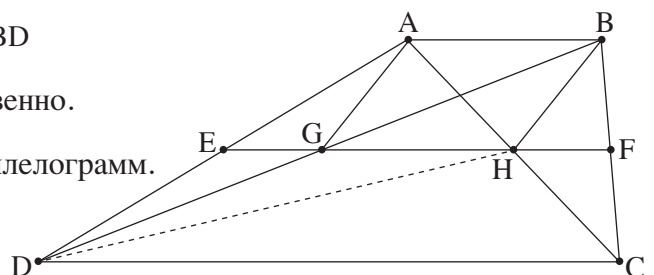
(α) В трапеции  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) отрезок  $EF$  – средняя линия трапеции.

Отрезок  $EF$  пересекает диагонали  $AC$  и  $BD$

этой трапеции в точках  $H$  и  $G$ , соответственно.

Дано, что четырехугольник  $ABHG$  – параллелограмм.

(1) Докажите:  $GH = 2EG$  .



Продолжение прямой  $AG$  пересекает отрезок  $DH$  в точке  $M$  .

(2) Докажите: отрезок  $AM$  делит отрезок  $DH$  пополам.

(א) Ниже приведены графики I–III, соответствующие функции  $f(x)$ , функции первой производной  $f'(x)$  и функции второй производной  $f''(x)$ . Эти функции определены для  $0 \leq x \leq 3$ .

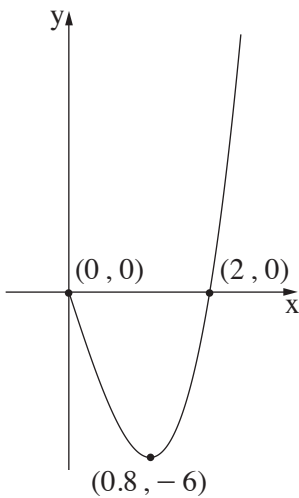
(1) Для каждого из графиков I–III найдите соответствующую ему функцию из функций  $f(x)$ ,  $f'(x)$  и  $f''(x)$ . Обоснуйте свой ответ.

Ответьте на вопросы подпунктов (2)–(3), согласно данным графикам I–III.

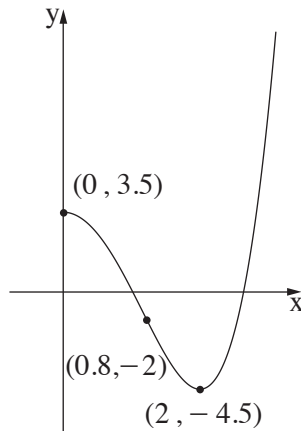
(2) Найдите уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в точке ее перегиба.

(3) Найдите значение интеграла  $\int_0^{0.8} f''(x) dx$ .

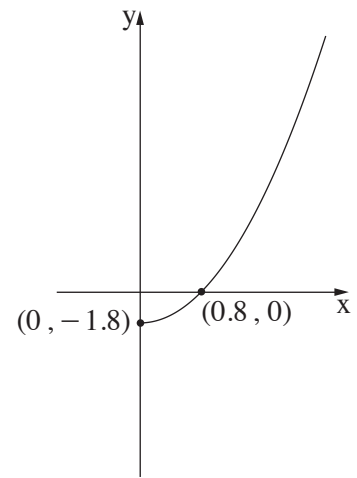
III



II



I



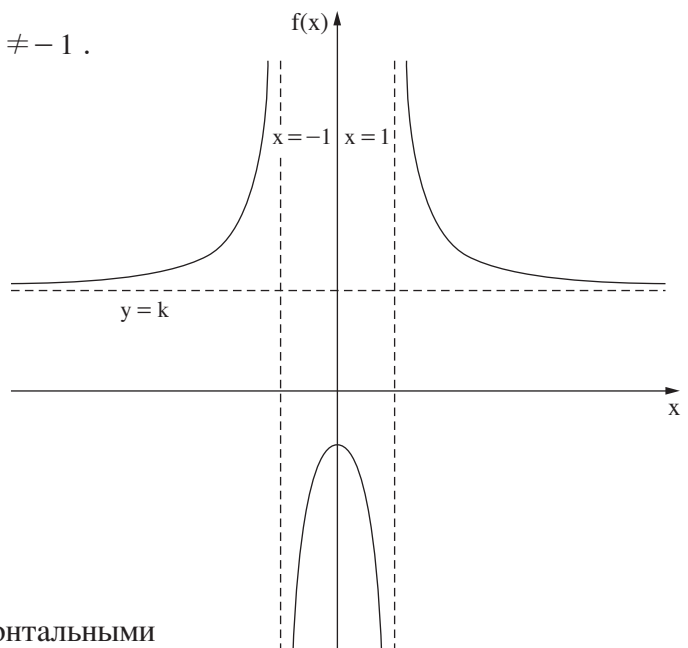
(7) Справа приведен график функции  $f(x)$ .

Функция  $f(x)$  определена для  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$ .

Уравнения асимптот функции  $f(x)$ :

$x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $y = k$ ,  $k > 1$ .

Координаты точек пересечения графика функции  $f(x)$  с осью  $y$ :  $(0, -a)$ ,  $a$  – положительное число.



(1) Найдите, для каких значений  $a$  у графиков функций  $f(x)$  и  $\frac{1}{f(x)}$  есть две точки пересечения.

Обоснуйте свой ответ.

(2) Дано, что расстояние между горизонтальными асимптотами функций  $f(x)$  и  $\frac{1}{f(x)}$  равно 1.5.

Каково значение  $k$ ? Обоснуйте свой ответ.

/продолжение на странице 4/

2. Даны две бесконечные сходящиеся [מתכנסת] геометрические прогрессии,  $A$  и  $B$ , все члены которых отличны от  $0$ .

Общим членом прогрессии  $A$  является  $a_n$ , а ее знаменателем является  $q_A$ .

Общим членом прогрессии  $B$  является  $b_n$ , а ее знаменателем является  $q_B$ .

Из двух геометрических прогрессий  $A$  и  $B$  строят новую бесконечную сходящуюся геометрическую прогрессию, члены которой:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots$$

Все три прогрессии, прогрессия  $A$ , прогрессия  $B$  и новая прогрессия не постоянные.

- (к) Выразите знаменатель новой прогрессии при помощи  $q_A$  и  $q_B$ .

Прогрессия  $A$  не убывающая и не возрастающая, а прогрессия  $B$  – возрастающая.

- (а) Относительно каждого из двух высказываний (1)–(2) определите, верно оно или неверно, и обоснуйте свой ответ.

(1) Знаменатель новой прогрессии является положительным.

(2) Все члены прогрессии  $B$  являются отрицательными.

Числа  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  являются тремя первыми членами арифметической прогрессии.

Дано, что  $c_2$  равен  $-c_1$  и что также выполняется:  $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{45}$ .

- (а) Найдите  $c_1$ .

Дано, что знаменатель прогрессии  $A$  равен  $c_1$

и также выполняется  $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$

- (т) Найдите значение  $q_B$ .

3. В большом колледже предложили сократить обеденный перерыв, чтобы учебный день заканчивался раньше. Вследствие этого состоялся опрос, в котором участвовали все студенты 1 курса и все студенты 2 курса.

Согласно результатам опроса выяснилось, что 80% участников, которые поддержали предложение, были студентами 1 курса. Также выяснилось, что число студентов 1 курса, поддержавших предложение, равно числу студентов 2 курса, которые выступили против предложения. Среди участников опроса не было воздержавшихся.

Обозначим через  $p$  вероятность выбрать случайным образом из числа всех студентов, участвовавших в опросе, студента, который поддерживает предложение.

- (к) Случайным образом выбрали одного студента из числа студентов 2 курса. Какова вероятность того, что он выступает против предложения?

Известно, что вероятность того, что студент, выбранный случайным образом из числа студентов 1 курса, поддерживает предложение, на  $\frac{13}{35}$  больше вероятности того, что студент, выбранный случайным образом из числа студентов 2 курса, поддерживает предложение.

- (а) Вычислите значение  $p$ .

- (а) Случайным образом выбрали одного из участников опроса. Вычислите вероятность того, что выполняется, по меньшей мере, одно из следующих условий:

I. Выбранный участник – студент 2 курса.

II. Выбранный участник поддерживает это предложение.

- (т) Случайным образом выбрали 5 из участников опроса.

Известно, что все пятеро выбранных участников являются студентами 2 курса. Какова вероятность того, что, по меньшей мере, двое из них поддерживают предложение, а также, по меньшей мере, двое из них выступают против предложения? /продолжение на странице 5/

**Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости**

4. Точки  $A, B$  и  $C$  расположены на окружности.

Точка  $E$  – середина дуги  $BC$ , как показано на чертеже справа.

Через точку  $E$  проводят касательную к данной окружности.

Эта касательная пересекает продолжение хорды  $AB$  в точке  $G$ .

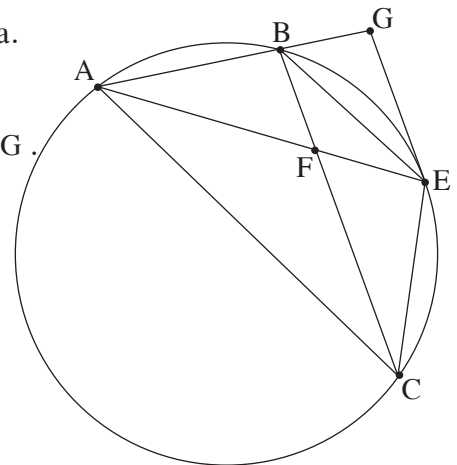
Хорды  $AE$  и  $BC$  пересекаются в точке  $F$ .

(\*) Докажите:  $\triangle ACE \sim \triangle AEG$ .

Дано:  $AG = 6$ ,  $AE = 3\sqrt{6}$ .

(1) Вычислите длину хорды  $AC$ .

(2) Докажите:  $BC \parallel GE$ .



Дано: площадь треугольника  $ABF$  в 2 раза больше площади треугольника  $BFE$ .

(3) Вычислите длину хорды  $AB$ .

(4) Каково соотношение между площадью треугольника  $ABF$  и площадью треугольника  $AFC$ ?

Обоснуйте свой ответ.

5. Дельтоид  $[ABCD]$  вписан в окружность с радиусом  $R$ .

Хорда  $AC$  – главная диагональ дельтоида.

Точка  $O$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$  (смотрите чертеж).

Обозначим:  $\sphericalangle CAB = \alpha$ .

(\*) (1) Найдите углы треугольника  $AOC$

(при необходимости выразите при помощи  $\alpha$ ).

(2) Выразите длину отрезка  $AO$  при помощи  $\alpha$  и  $R$ .

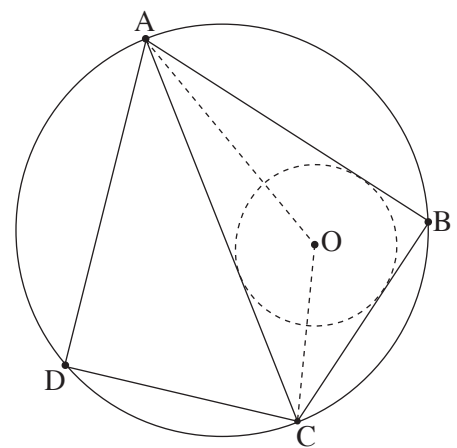
Дано, что длина отрезка  $AO$  равна  $R\sqrt{2}$ .

(1) Найдите величину угла  $\alpha$ .

Дано, что площадь дельтоида равна  $25\sqrt{3}$ .

(2) Найдите  $R$ .

(3) Вычислите расстояние между центром окружности, описанной вокруг дельтоида, и центром окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .



### Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

6. Дана функция:  $f(x) = \frac{2a - x^2}{x}$ , определенная для  $x \neq 0$ .  $a$  – положительный параметр.
- (к) При необходимости выразите свои ответы при помощи  $a$ .
- (1) Найдите уравнения асимптот функции  $f(x)$ , перпендикулярных осям координат, если таковые существуют.
  - (2) Покажите, что функция  $f(x)$  является нечетной функцией.
  - (3) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $f(x)$  с осями координат (если таковые существуют).
  - (4) Найдите области возрастания и области убывания функции  $f(x)$  (если таковые существуют).
  - (5) Найдите область вогнутости вверх ( $\cup$ ) и область вогнутости вниз ( $\cap$ ) функции  $f(x)$ .
- (д) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .

Также дана функция  $g(x) = |f(x)| - b$ ,  $b$  – положительный параметр.

Функция  $g(x)$  определена в той же области, что и функция  $f(x)$ .

- (ж) Начертите схематический график функции  $g(x)$ .

Известно, что одной из точек экстремума функции  $g(x)$  является  $(2, -3)$ .

- (з) Найдите значения  $a$  и  $b$ .

Также дана функция  $s(x) = \int_1^x g(t) dt$ , определенная в области  $1 < x$ .

- (и) Каков тип точки экстремума функции  $s(x)$ ? Обоснуйте свой ответ.

7. Дана функция  $f(x)$ , определенная в области  $x \leq a$ ,  $x \neq 0$ .

$a$  – положительный параметр.

На чертеже справа изображен график функции производной  $f'(x)$ .

Функция производной  $f'(x)$  определена в области  $x \neq 0$ ,  $x < a$ .

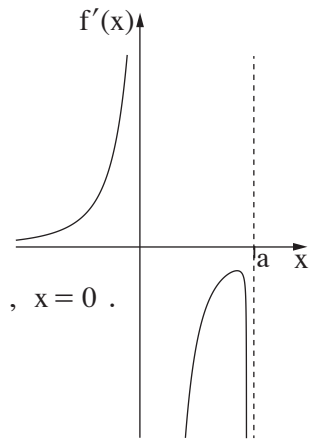
У функции производной  $f'(x)$  есть три асимптоты,

перпендикулярные осям координат, уравнения которых  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = 0$ .

В области  $x < 0$  функция производной  $f'(x)$  возрастает.

Прямая  $x = 0$  является асимптотой также и к графику функции  $f(x)$ .

$f(a) = 0$ .



(\*) (1) Найдите область возрастания и область убывания функции  $f(x)$  (при необходимости выразите свой ответ при помощи  $a$ ). Обоснуйте свой ответ.

(2) Сколько точек перегиба есть у функции  $f(x)$ ? Обоснуйте свой ответ.

Дано, что прямая  $y = 0$  является асимптотой к графику функции  $f(x)$ .

(\*) Начертите возможный схематический график функции  $f(x)$  в соответствии с вашим ответом в подпункте (\*)–(2).

Дано, что одно из приведенных ниже выражений I–IV соответствует функции  $f(x)$ .

$$\frac{\sqrt{x-a}}{x} \text{ IV} \quad \frac{\sqrt{a-x}}{x} \text{ III} \quad \frac{\sqrt{x-a}}{x^2} \text{ II} \quad \frac{\sqrt{a-x}}{x^2} \text{ I}$$

(\*) Какое из выражений I–IV соответствует функции  $f(x)$ ? Обоснуйте свой ответ.

Известно, что угловой коэффициент касательной к графику функции  $f(x)$  в точке, в которой  $x = (-2)$ , равен  $\frac{7}{16}$ .

(\*) Найдите значение  $a$ .

(\*) Подставьте  $a = 2$  и вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции  $(f(x))^2$ , осью  $x$  и прямой  $x = 1$ .

8. Дан ромб ABCD. Точка E – середина стороны BC.

Обозначим:  $\sphericalangle ECD = x$ .

Дано: площадь треугольника ECD равна 18.

(\*) Выразите при помощи  $x$  длину стороны ромба.

(\*) Вычислите минимальную длину отрезка DE.

**Желаем успеха!**

Авторские права принадлежат Государству Израиль.  
 Копировать или публиковать можно только  
 с разрешения Министерства просвещения.

**בהצלחה!**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.  
 אין להעתיק או לפרסם  
 אלא ברשות משרד החינוך.